Lezione 4

Nella Lezione 3 abbiamo introdotto il Calcolo di Malliavin in dim 1

Funzioni regolari

$\mathcal{S} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ t.c. f e le sue derivate abbiano crescita al più polinomiale all'infinito $\}$

$\mathcal{S}$ e' denso in $L^q(\gamma)$ per $q \in [1, +\infty)$, con γ misura Gaussiana standard su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Derivata di Malliavin $p = 1, 2, \dots$

$$D^p : \mathcal{S} \subset L^q(\gamma) \longrightarrow L^q(\gamma)$$
$$f \longmapsto f^{(p)}$$

e' lineare e chiudibile $\forall q \in [1, +\infty)$

Estensione chiusa

$$f \in \mathcal{S}, \quad \|f\|_{\mathbb{D}^{p,q}} := \left(\int |f|^q d\gamma + \int |f'|^q d\gamma + \dots + \int |f^{(p)}|^q d\gamma \right)^{\frac{1}{q}}$$

$\mathbb{D}^{p,q} := \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{p,q}}}$ Dominio della derivata p-esima di Malliavin rispetto alla norma $L^q(\gamma)$

2

L'operatore $D^p : \mathbb{D}^{p,q} \longrightarrow L^q(\gamma)$ è un'estensione chiusa (la minimale) di $D^p : \mathcal{S} \subset L^q(\gamma) \to L^q(\gamma)$

Oss $\mathbb{D}^{p,q}$ è di Banach
$\mathbb{D}^{p,2}$ è di Hilbert

Divergenza $D^p : \mathcal{S} \subset \mathbb{D}^{p,2} \subset L^2(\gamma) \longrightarrow L^2(\gamma)$
lineare e densamente definito.

$$\mathrm{dom}(\delta^p) := \Big\{ g \in L^2(\gamma) \text{ t.c. } \exists\, c>0 : \left| \int_{\mathbb{R}} D^p f \cdot g \, d\gamma \right| \le c \, \|f\|_{L^2(\gamma)} \quad \underbrace{\forall f \in \mathcal{S}}_{} \Big\}$$

equivalentemente $\forall f \in \mathbb{D}^{p,2}$

Dunque $\delta^p : \mathrm{dom}(\delta^p) \subset L^2(\gamma) \longrightarrow L^2(\gamma)$
$$g \longmapsto \delta^p g$$

$\delta^p g$ è l'unico elemento di $L^2(\gamma)$ t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} D^p f \cdot g \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \delta^p g \, d\gamma \qquad \underbrace{\forall f \in \mathcal{S}}_{}$$

formula di dualità

equivalentemente $\forall f \in \mathbb{D}^{p,2}$

Semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck

$(P_t)_{t\geq 0}$, $f\in\mathcal{S}$

$$P_t f(x) := \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}\,y\right)d\gamma(y) \qquad x\in\mathbb{R}$$

· P_t e' lineare e $\|P_t f\|_{L^q(\gamma)} \leq \|f\|_{L^q(\gamma)}$ $\quad \forall q\in[1,+\infty)$ $\forall f\in\mathcal{S}$

Dunque P_t si estende in modo unico a un operatore di contrazione su $L^q(\gamma)$.

Generatore infinitesimale L di $(P_t)_{t\geq 0}$

$$\mathrm{dom}(L) := \left\{ f\in L^2(\gamma) : \exists \lim_{h\to 0}\frac{P_h f - f}{h} \text{ in } L^2(\gamma)\right\}$$

Dunque
$$L: \mathrm{dom}(L)\subset L^2(\gamma)\longrightarrow L^2(\gamma)$$
$$f \longmapsto \lim_{h\to 0}\frac{P_h f-f}{h} \text{ in } L^2(\gamma)$$

Proprieta'

1. $\forall g\in \mathrm{dom}(\delta^p)$, $\int_{\mathbb{R}}\delta^p g\,d\gamma = 0$ $\quad p=1,2,\dots$
2. $\mathbb{D}^{p,2}\subset \mathrm{dom}(\delta^p)$ $\quad p=1,2,\dots$
3. $\forall g\in\mathbb{D}^{p,2}$, $\delta g(x) = x\,g(x) - Dg(x)$
4. $f\in\mathbb{D}^{1,2} \Rightarrow P_t f\in\mathbb{D}^{1,2}$ $\forall t\geq 0$

e $$D P_t f = e^{-t} P_t D f$$ 4

5. $\forall f \in \mathcal{S}$, $Lf = -\delta D f$

6. $\forall f \in \mathcal{S}$, $p = 1, 2, \dots$

$$(D\delta^p - \delta^p D) f = p\, \delta^{p-1} f$$

Polinomi di Hermite

Definizione Sia $p \geq 0$ un intero. Il p-esimo polinomio di Hermite H_p è definito come segue:

$$H_0 \equiv 1$$

$p \geq 1$ $$H_p := \delta^p 1$$

$1 \to f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$p=1$ $H_1 = \delta 1$, $\delta 1$ è l'unico elemento di $L^2(\gamma)$ t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} Df \cdot 1 \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \delta 1 \, d\gamma \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

Dal lemma di Stein $\Rightarrow$ $$\int_{\mathbb{R}} Df \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, d\gamma(x)$$

$$H_1(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$p=2$ $H_2 = \delta^2 1$, $\delta^2 1$ è l'unico elemento di $L^2(\gamma)$ t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} D^2 f \cdot 1 \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \delta^2 1 \, d\gamma \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

Scriviamo $\int_{\mathbb{R}} D^2 f \, d\gamma \underset{\text{Stein}}{=} \int_{\mathbb{R}} x f'(x) \, d\gamma(x)$ 5

$$= \int_{\mathbb{R}} (x f(x))' \, d\gamma(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\gamma(x)$$

$$\underset{\text{Stein}}{=} \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) \, d\gamma(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\gamma(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)(x^2 - 1) \, d\gamma(x)$$

$$H_2(x) = x^2 - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\vdots$$

Convenzione $H_{-1} \equiv 0$

Proposizione Si ha, $\forall p \geq 0$ e $t \geq 0$

(i) $H'_p = p H_{p-1}$

(ii) $L H_p = -p H_p$

(iii) $P_t H_p = e^{-pt} H_p$

(iv) $H_{p+1}(x) = x H_p(x) - p H_{p-1}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

dimostrazione (i) Ricordiamo che $H_0 \equiv 1$,
per $p \geq 1$ $\quad H_p := \delta^p 1$

Per $p = 0$, (i) e' verificata. Sia $p \geq 1$,

$$H'_p = D\delta^p 1 = p\,\delta^{p-1} 1 + \delta^p \underbrace{D 1}_{=0}$$
$$= p\,H_{p-1}$$

(ii) $L H_p = -\delta D H_p = -\delta\,(p\,H_{p-1}) = -p\,\delta H_{p-1}$
$$= -p\,\delta\,\delta^{p-1} 1 = -p\,\delta^p 1 = -p\,H_p$$

(iii) $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{d}{dt} P_t H_p(x) = P_t L H_p(x) = \\ \qquad = -p\,P_t H_p(x) & t > 0 \\ P_0 H_p(x) = H_p(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad P_t H_p(x) = e^{-pt} H_p(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(iv) $H_{p+1}(x) = \delta^{p+1} 1\,(x) = \delta\,\delta^p 1\,(x) =$
$$= \delta\,H_p(x) = x\,H_p(x) - H'_p(x)$$
$$= x\,H_p(x) - p\,H_{p-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Proposizione Si ha

(i) $\forall\, p, q \geq 0 \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}} H_p(x)\,H_q(x)\,d\gamma(x) = \begin{cases} p! & \text{se } p = q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

(ii) La famiglia $\left\{ H_p/\sqrt{p!}\,,\ p \geq 0 \right\}$ è una base ortonormale di $L^2(\gamma)$

(iii) $f \in \mathbb{D}^{\infty,2} := \bigcap_{p \geq 1} \mathbb{D}^{p,2}$, allora

decomposizione caotica di $f \in \mathbb{D}^{\infty,2}$

$$f = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} D^p f \, d\gamma}{p!} H_p$$ dove la serie converge in $L^2(\gamma)$

7

dimostrazione (i) Se $p > q = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} H_p \underbrace{H_q}_{=1} d\gamma = \int_{\mathbb{R}} H_p \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} \delta^p 1 \, d\gamma = 0$$

· Se $p \geq q \geq 1$, $$\int_{\mathbb{R}} H_p H_q \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} H_p \overbrace{\delta^q 1}^{= \delta\delta^{q-1} 1} d\gamma$$

$$= \int_{\mathbb{R}} H_p' \, \delta^{q-1} 1 \, d\gamma = p \int_{\mathbb{R}} H_{p-1} H_{q-1} \, d\gamma$$

$\rightarrow$ induzione.

(ii) $\{ H_p / \sqrt{p!}, \, p \geq 0 \}$ e' ortonormale in $L^2(\gamma)$.

Per induzione ($H_p' = p H_{p-1}$) si dimostra che H_p e' un polinomio di grado p.

Dire che $\{ H_p / \sqrt{p!}, \, p \geq 0 \}$ e' una base (ortonormale di $L^2(\gamma)$) equivale a dire che $\{ x^n, n \geq 0 \}$ e' denso in $L^2(\gamma)$ (e' vero).

$\Rightarrow$ $f \in L^2(\gamma)$, $$f = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} f H_p \, d\gamma}{p!} H_p$$ convergenza in $L^2(\gamma)$

8

(iii) $f \in \mathbb{D}^{\infty,2} \Rightarrow f \in L^2(\gamma)$

$$f \in L^2(\gamma), \quad f = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} f H_p \, d\gamma}{p!} H_p$$

$$\Rightarrow f \in \mathbb{D}^{p,2}, \text{ allora } \int_{\mathbb{R}} f H_p \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} f \, \delta^p 1 \, d\gamma$$

$$= \int_{\mathbb{R}} D^p f \cdot 1 \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}} D^p f \, d\gamma$$

Osservazioni 1. Sia $f(x) = e^{cx}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

allora $f \in \mathbb{D}^{\infty,2} = \bigcap_{p \geq 1} \mathbb{D}^{p,2}$

$$\Rightarrow e^{cx} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{c^p \int_{\mathbb{R}} e^{cy} e^{-y^2/2} / \sqrt{2\pi} \, dy}{p!} H_p(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$= e^{c^2/2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{c^p}{p!} H_p(x)$$

Taylor centrato in $c=0$

2. $$e^{cx - c^2/2} = e^{x^2/2} \overbrace{e^{-(x-c)^2/2}} =$$

$$= e^{x^2/2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{c^p}{p!} \underbrace{\frac{d^p}{dc^p} e^{-(x-c)^2/2} \Big|_{c=0}}_{=}$$

$$= e^{x^2/2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{c^p}{p!} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} e^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow (1. + 2.) \quad H_p(x) = e^{x^2/2} (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} e^{-x^2/2} \qquad p \geq 0$$

3. $H_p(-x) = (-1)^p H_p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Per $p=0$ e $p=1$ e' vera $\left(H_0 \equiv 1, \ H_1(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R} \right)$

Per induzione: $H_{p+1}(x) = x H_p(x) - p H_{p-1}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

Applicazione (Nourdin-Peccati 2012, Cap 1)

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$, $f \in \mathbb{D}^{\infty,2} = \bigcap_{p \geq 1} \mathbb{D}^{p,2}$. Allora sappiamo

che $f(N) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{\mathbb{E}[D^p f(N)]}{p!} H_p(N)$ in $L^2(\mathbb{P})$

Proposizione Per $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, $f \in \mathbb{D}^{\infty,2}$

$$\mathrm{Var}(f(N)) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}[D^p f(N)]^2}{p!}$$

Se inoltre $\mathbb{E}[D^p f(N)^2]/p! \to 0$ per $p \to +\infty$,

e $f \in \mathcal{S}$

$$\mathrm{Var}(f(N)) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \mathbb{E}[D^p f(N)^2].$$

Esercizio $p, q \geq 1$ interi:

$$H_p H_q = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r! \binom{p}{r} \binom{q}{r} H_{p+q-2r}$$

Processi Gaussiani (Richiami)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp di probabilità, I insieme arbitrario

10

Definizione Un processo reale su I $X = \{X(i), i \in I\}$ è una collezione di v.a. $X(i) : \Omega \to \mathbb{R}$ indicizzata da I.

Definizione Un processo reale su I $X = \{X(i), i \in I\}$ è detto Gaussiano se $\forall J \subseteq I$, J finito il vettore $(X(i))_{i \in J}$ è Gaussiano in $\mathbb{R}^{|J|}$.

Funzione media $m : I \to \mathbb{R}$
$i \mapsto \mathbb{E}[X(i)]$

Funzione covarianza $K : I \times I \to \mathbb{R}$
$(i,j) \mapsto \mathrm{Cov}(X(i), X(j))$

Teorema Le funzioni di media e covarianza identificano le leggi finito-dimensionali di un processo Gaussiano X.

Teorema (Kolmogorov) $\forall$ I insieme $\forall$ funzione $m : I \to \mathbb{R}$, $\forall$ funzione $K : I \times I \to \mathbb{R}$ simmetrica e semidef positiva, $\exists$ un processo Gaussiano X su I che ha m come funzione di media e K come funzione covarianza.

Scopo: Approssimazione Gaussiana

$N \sim N(0,1)$, F una v.a., siamo interessati a stimare

$$d_{\mathcal{H}}(F,N) := \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(N)] \right|$$

con $\mathcal{H}$ classe separante.

Supponiamo ora $F = f((X(i))_{i \in I})$ con f sufficientemente regolare e $\{X(i), i \in I\}$ processo Gaussiano.

Processi Gaussiani isonormali

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp di probabilità

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ sp di Hilbert reale separabile

Definizione Un processo Gaussiano isonormale $X = \{X(h), h \in H\}$ su H e' un processo Gaussiano su H t.c.

- $\mathbb{E}[X(h)] = 0 \quad \forall h \in H$
- $\mathbb{E}[X(h)X(g)] = \langle h, g \rangle_H \quad \forall h, g \in H$

12

Osservazioni 1. $X : H \longrightarrow L^2(\mathbb{P})$ e' lineare
$h \mapsto X(h)$

infatti $\forall h, g \in H$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[\left(X(\lambda h + \mu g) - \lambda X(h) - \mu X(g) \right)^2 \right] = 0$$

2. $X : H \longrightarrow \underbrace{X(H)} \subseteq L^2(\mathbb{P})$ e' un' isometria lineare

sottospazio lineare Gaussiano:
sottosp lineare chiuso t.c. i suoi elementi sono Gaussiane centrate

3. Dato uno sp di Hilbert reale separabile H, esiste sempre un processo Gaussiano isonormale su H (Kolmogorov).

Costruzione: b.o. di H $\{ e_i, i \geq 1 \}$

$$h \in H, \quad h = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle h, e_i \rangle_H e_i, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \langle h, e_i \rangle_H^2 = \|h\|_H^2$$

Prendiamo $\{ Z_i, i \geq 1 \}$ v.a. iid $\sim \mathcal{N}(0,1)$, consideriamo

per $n \geq 1$, $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_i \rangle_H Z_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_i \rangle_H^2 \right)$

$\displaystyle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle h, e_i \rangle_H Z_i \right)_n$ converge in $L^2(\mathbb{P})$

Indichiamo con $\displaystyle X(h) := \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_i \rangle_H Z_i$ in $L^2(\mathbb{P})$

$$\Rightarrow X(h) \sim \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} \langle h, e_i \rangle_H^2}_{= \|h\|_H^2} \Big)$$

Inoltre $X = \{X(h), h \in H\}$ è un processo Gaussiano isonormale su H. (13)

Infatti, X è un processo Gaussiano, $\mathbb{E}[X(h)] = 0$ $\forall h \in H$, $\forall h, g \in H$, $\mathbb{E}[X(h)X(g)] =$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \langle h, e_i \rangle_H \langle g, e_i \rangle_H \underset{\text{Parseval}}{=} \langle h, g \rangle_H .$$

Esempio (dimensione 1)

$H = \mathbb{R}$, dunque il processo Gaussiano isonormale su $\mathbb{R}$ è $X = \{X(h), h \in \mathbb{R}\}$ con $X(h) = h \cdot Z$, con $h \in \mathbb{R}$, $Z \sim N(0,1)$

Esempio (spazi L^2)

Sia $(A, \mathcal{A}, \mu)$ con $(A, \mathcal{A})$ sp polacco e μ una misura positiva, σ-finita e non-atomica.

$\exists (A_n)_n \subset \mathcal{A} : \mu(A_m) < +\infty$, $\bigcup_m A_m = A$

$\forall B \in \mathcal{A} : \mu(B) > 0$, $\exists C \in \mathcal{A}$, $C \subset B$: $\mu(B) > \mu(C) > 0$

Consideriamo lo spazio $L^2(A, \mathcal{A}, \mu) =: L^2(\mu)$, è di Hilbert separabile. Facciamo vedere che il processo Gaussiano isonormale X su $L^2(\mu)$ si può vedere come l'integrale di Wiener-Itô rispetto alla misura Gaussiana su $(A, \mathcal{A})$ con controllo μ.

14

Sia $\mathcal{A}_0 := \{ B \in \mathcal{A} : \mu(B) < +\infty \}$. Una misura Gaussiana su $(A, \mathcal{A})$ con controllo μ è un processo Gaussiano su $\mathcal{A}_0$

$$G = \{ G(B),\ B \in \mathcal{A}_0 \}$$

t.c.
$$\mathbb{E}[G(B)] = 0 \quad \forall B \in \mathcal{A}_0,$$
$$\mathbb{E}[G(B)G(C)] = \mu(B \cap C), \quad B, C \in \mathcal{A}_0$$

Sia $\mathcal{E}$ l'insieme delle fnz elementari della forma

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad a_i \in \mathbb{R},\ A_i \in \mathcal{A}_0,\ m \geq 1$$

disgiunti a due a due

Definiamo l'integrale di Wiener-Ito rispetto a G

$$I(f) := \sum_{i=1}^{m} a_i G(A_i), \qquad \forall f \in \mathcal{E}.$$

$$\sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \mu(A_i)\right)$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \mu(A_i) = \int_A f^2 \, d\mu$$

Ho un operatore $I : \mathcal{E} \to L^2(\mathbb{P})$
$f \mapsto I(f)$ t.c.

non dipende dalla rappresentazione di f,
e' lineare e
$$\mathbb{E}[I(f)\, I(g)] = \langle f, g \rangle_{L^2(\mu)} \quad \forall f,g \in \mathcal{E}.$$

15

L'insieme $\mathcal{E}$ e' denso in $L^2(\mu)$, dunque I si estende in modo unico a un operatore
$$I : L^2(\mu) \to L^2(\mathbb{P})$$
lineare, $\mathbb{E}[I(f)\, I(g)] = \langle f, g \rangle_{L^2(\mu)} \quad \forall f,g \in L^2(\mu)$.
$$\mathbb{E}[I(f)] = 0 \quad \forall f \in L^2(\mu)$$

$\Rightarrow$ I e' il processo Gaussiano isonormale su $L^2(\mu)$. Per $f \in L^2(\mu)$, $I(f) = \int_A f \, dG$

Osservazioni Sia $A = [0,+\infty)$, $\mathcal{A} = \beta([0,+\infty))$, $\mu = \text{Leb}$. Abbiamo lo spazio
$$L^2([0,+\infty), \beta([0,+\infty)), \text{Leb}) =: L^2(\text{Leb}).$$
Sappiamo che il processo Gaussiano isonormale su $L^2(\text{Leb})$ e' l'integrale di Wiener-Itô rispetto alla misura Gaussiana su $\big([0,+\infty), \beta([0,+\infty))\big)$ con controllo Leb.

1. $t \geq 0$, $f = \mathbb{1}_{[0,t)}$, allora

$B := \{ B_t := X(\mathbb{1}_{[0,t)}),\ t \geq 0 \}$ e' un pre-moto Browniano.

Infatti B e' un processo Gaussiano t.c.

$$\mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[X(\mathbb{1}_{[0,t)})] = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$s, t \geq 0$

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[X(\mathbb{1}_{[0,t)}) X(\mathbb{1}_{[0,s)})]$$

processo Gauss isonormale $\leftarrow$ $$= \int_{[0,+\infty)} \mathbb{1}_{[0,t)} \mathbb{1}_{[0,s)} \, d\text{Leb} = s \wedge t$$

2. Per il criterio di continuità di Kolmogorov, esiste una versione continua di $\{B_t, t \geq 0\} = B$ che chiamo ancora B.

$\rightarrow$ X e' versione di Y se $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \geq 0$.

3. Data $f \in L^2(\text{Leb})$, si ha che il suo integrale di Wiener - Itô

$$X(f) = \int_{[0,+\infty)} f \, dG$$

coincide con l'integrale stocastico di f

$$\int_{[0,+\infty)} f(t) \, dB_t .$$

Prendiamo una fnz semplice del tipo

$s = \sum_{i=1}^{m} a_i \, 1\!\!1_{[t_i, t_{i+1})}$ con $a_i \in \mathbb{R}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1}$

Definiamo $\int_{[0,+\infty)} s(t) \, dB_t := \sum_{i=1}^{m} a_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$

$$\sim N\Big(0, \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i^2 (t_{i+1} - t_i)}_{= \int_{[0,+\infty)} s^2(t) \, d\mathrm{Leb}(t)}\Big)$$

Per $f \in L^2(\mathrm{Leb})$, $\exists \{f_n, n \geq 1\}$ di f.ni semplici t.c. $f_n \to f$ in $L^2(\mathrm{Leb})$. Dunque

$$\int_{[0,+\infty)} f(t) \, dB_t := \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,+\infty)} f_n(t) \, dB_t \quad \text{in } L^2(\mathbb{P})$$

Integrale di Wiener : $L^2(\mathrm{Leb}) \longrightarrow L^2(\mathbb{P})$

$$f \longmapsto \int_{[0,+\infty)} f(t) \, dB_t$$

lineare, $\mathbb{E}\left[\int_{[0,+\infty)} f(t) \, dB_t \right] = 0 \quad \forall f \in L^2(\mathrm{Leb})$

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,+\infty)} f(t) \, dB_t \int_{[0,+\infty)} g(t) \, dB_t \right] = \int_{[0,+\infty)} f(t) g(t) \, d\mathrm{Leb}(t).$$

Quindi, $\forall f \in L^2(\mathrm{Leb})$

$$\int_{[0,+\infty)} f \, dG = \int_{[0,+\infty)} f(t) \, dB_t$$

integrale di Wiener-Itô rispetto alla misura Gaussiana con controllo Leb

integrale di Wiener di f

4. Per $t \geq 0$, $B_t := X(\mathbb{1}_{[0,t)})$. Allora

$$X = \overline{\text{span}\{B_t,\ t \geq 0\}}^{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})}}$$

$$\| \quad \{X(h),\ h \in L^2(\text{Leb})\} \text{ processo Gaussiano isonormale.}$$

18

Caos di Wiener

Proposizione Siano $Z, Y \sim N(0,1)$ congiuntamente Gaussiane. Allora $\forall n, m \geq 0$

$$\mathbb{E}[H_n(Z) H_m(Y)] = \begin{cases} n!\ (\mathbb{E}[ZY])^n & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

dimostrazione Convenzione: $0^0 = 1$

Sia $\rho := \mathbb{E}[ZY]$. Supponiamo che $\rho > 0$.
Allora $(Z, Y) \stackrel{d}{=} (N, \rho N + \sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{N})$ con $N, \tilde{N}$ iid $\sim N(0,1)$. $\forall n, m \geq 0$

$$\mathbb{E}[H_n(Z) H_m(Y)] = \mathbb{E}\left[H_n(N) H_m\left(\rho N + \sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{N}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_n(N) H_m\left(\rho N + \sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{N}\right) \middle| N\right]\right]$$

lemma di freezing

$$\stackrel{?}{=} \mathbb{E}\left[\left(H_n(x)\, \mathbb{E}\left[H_m\left(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{N}\right)\right]\right)_{|x=N}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[H_n(N)\ \mathbb{E}\left[H_m\left(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{N}\right)\right]_{|x=N}\right]$$

$f \in \mathcal{S}$, $P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1-\rho^2}\, y)\, d\gamma(y)$
$t \geq 0$

$$= \mathbb{E}[f(e^{-t}x + \sqrt{1-\rho^2}\, \tilde{N})] \qquad \rho \in (0,1]$$

$\Rightarrow \log \frac{1}{\rho} \geq 0$

$$= \mathbb{E}[H_n(N)\, P_{\log(1/\rho)} H_m(N)]$$

$P_t H_p = e^{-pt} H_p \quad \forall t \geq 0$
$\forall p = 0, 1, 2, \dots$

$$= \mathbb{E}[H_n(N) H_m(N)]\, \rho^m$$

$$= \begin{cases} \rho^m \cdot m! & \text{se } n = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \rho = \mathbb{E}[ZY].$$

19

Se $\rho = 0$, allora $Z \perp\!\!\!\perp Y$

$\delta_0^m = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[H_n(Z) H_m(Y)] = \overbrace{\mathbb{E}[H_n(Z)]}^{= \delta_0^n}\, \mathbb{E}[H_m(Y)]$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } n = m = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio Fare il caso $\rho < 0$. $\square$

H reale separabile di Hilbert, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X processo Gaussiano isonormale su H. Supponiamo che $\mathcal{F} = \sigma(X)$.

Definizione Sia $n \geq 0$ intero. Sia $\mathcal{C}_n$ il sottospazio lineare chiuso di $L^2(\mathbb{P})$ generato da v.a. della forma

$$H_n(X(h)), \quad h \in H, \ \|h\|_H = 1$$

Lo spazio C_n e' detto **n-esimo caos di Wiener.**

Osservazioni 1. $C_0 = \mathbb{R}$ $\qquad H_0 \equiv 1$

2. $C_1 = \{ X(h), h \in H \}$ $\qquad H_1(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$

3. Se $n \neq m$, $n, m \geq 0$, allora

$$C_n \perp C_m \text{ in } L^2(\mathbb{P})$$

$\Rightarrow$ la somma $\bigoplus_{n=0}^{+\infty} C_n$ $\subseteq L^2(\mathbb{P})$ e' diretta

Teorema (Wiener-Itô)

(i) $\text{span}\{ H_n(X(h)), h \in H, \|h\|_H = 1, n \geq 0 \}$

e' denso in $L^q(\mathbb{P})$ $\forall q \in [1, +\infty)$

(ii) $\underbrace{L^2(\mathbb{P})}_{L^2(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})} = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} C_n$ decomposizione caotica di $L^2(\mathbb{P})$

(ii) vuol dire che $\forall F \in L^2(\mathbb{P})$,

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{+\infty} F_n$$ dove la rappresentazione e' unica,

$F_n \in C_n$ $\forall n \geq 1$ e la convergenza della serie è in $L^2(\mathbb{P})$.

(Talvolta si scrive $\text{proj}(F|C_m)$ al posto di F_m)

Esempio (caso 1-dim)

$H = \mathbb{R}$, abbiamo visto $X(h) = h \cdot Z$, $Z \sim N(0,1)$, $h \in \mathbb{R}$.

$$m \geq 0, \quad C_m = \overline{\text{span}\{H_m(X(h)),\ h \in \mathbb{R},\ |h| = 1\}}^{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})}}$$

$$= \overline{\text{span}\{H_m(Z),\ \underbrace{H_m(-Z)}_{= (-1)^m H_m(Z)}\}}^{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})}}$$

$$= \text{span}\{H_m(Z)\} = \{\lambda H_m(Z),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Da questo si deduce che

$$F \in L^2(\mathbb{P}) \Rightarrow F = \varphi(Z), \text{ con } \varphi \in L^2(\gamma)$$

quindi $\displaystyle \varphi(Z) = \mathbb{E}[\varphi(Z)] + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot H_p \, d\gamma}{p!} H_p(Z)$

in $L^2(\mathbb{P})$.

dimostrazione (i) Basta far vedere $\forall q \in (1, +\infty]$, $\forall F \in L^q(\mathbb{P})$ t.c.

$$\mathbb{E}[F\, H_m(X(h))] = 0 \qquad \begin{matrix} \forall m \geq 0 \\ \forall h \in H,\ \|h\|_H = 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow F = 0 \quad \mathbb{P}$-q.c.

Si ha $\mathbb{E}[F\, X(h)^n] = 0 \quad \forall n \geq 0,\ \forall h \in H,\ \|h\|_H = 1$

x^n si puo' scrivere come c.l. di H_r, $r \in \{0, \dots, n\}$.

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[F\, e^{itX(h)}] = 0 \quad \forall h \in H, \|h\|_H = 1$

che equivale $\mathbb{E}[F\, e^{iX(h)}] = 0 \quad \forall h \in H.$ (*)

Sia $\{h_i, i \geq 1\}$ una b.o. di H e per $m \geq 1$ 22

$\mathcal{Y}_m := \sigma(X(h_1), X(h_2), \dots, X(h_m)).$

Per linearita' di X,

(*) $\Rightarrow \mathbb{E}[F\, e^{i\sum_{j=1}^m \lambda_j X(h_j)}] = 0 \quad \forall m \geq 1\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

e' equivalente a dire che $\forall m \geq 1, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[F \mid \mathcal{Y}_m]\, e^{i\sum_{j=1}^m \lambda_j X(h_j)}\right] = 0$$

da S.a. $\mathbb{E}[F \mid \mathcal{Y}_m] = \varphi(X(h_1), \dots, X(h_m))$,

dove $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ misurabile.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x_1, \dots, x_m)\, e^{i\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m x_j^2}\, dx_1 \dots dx_m = 0$$

$(X(h_1), \dots, X(h_m)) \sim \mathcal{N}(0, I_{m \times m})$

Quindi la tasformata di Fourier di

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_m)\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m x_j^2}$$

e' identicamente 0, dunque $\varphi = 0$ q.o.

$\Rightarrow \mathbb{E}[F \mid \mathcal{Y}_m] = 0 \quad \forall m \geq 1.$

Ora ricordando che $\mathcal{Y}_m = \sigma(X(h_1), \dots, X(h_m))$ e $\{h_i, i \geq 1\}$ b.o. di H, si ha che $\{\mathcal{Y}_m, m \geq 1\}$ genera $\mathcal{Y} = \sigma(X)$.

23

Allora $\underbrace{\mathbb{E}[F \mid \mathcal{Y}]}_{= F} = 0$ ma F e' $\mathcal{Y}$-misurabile per ipotesi, quindi $F = 0$ ($\mathbb{P}$-q.c.)

(ii) $L^2(\mathbb{P}) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} C_n$ segue immediatamente da (i) e l'ortogonalità dei caos di Wiener $\square$